Miscelánea Matemática **46** (2008) 73–91 SMM

El concepto de función en la obra de Euler: un recorrido a través de la constitución del Análisis Matemático Moderno

Carmen Martínez A. *

Depto. de Matemáticas

Fac. de Ciencias

Universidad Nacional Autónoma de México

cmai@lya.fciencias.unam.mx

Resumen

En este artículo estudiaremos el desarrollo del concepto de función desde Leibniz y Bernoulli hasta Euler y analizaremos el papel que la definición y las diferentes nociones de función en la obra de Euler jugaron en la constitución del Análisis Matemático como rama de las matemáticas modernas y a su vez la influencia que la constitución de esta disciplina tuvo sobre el concepto de función.

1. Introducción

Durante el siglo XVII el objeto fundamental de estudio de las matemáticas eran las curvas y a partir de éstas eran estudiadas las relaciones entre algunas cantidades geométricas variables. Estas cantidades geométricas eran por tanto objetos geométricos que guardaban alguna relación con las curvas como, por ejemplo, las ordenadas, las abscisas, las tangentes y las áreas entre las curvas. En los primeros tratados de

*Investigación realizada en el marco de los proyectos PAPIIT 401106-3 ¿Qué es el Análisis? y ECOS M04-H01 "El desarrollo del análisis, 1736-1905: la reorganización del análisis real, la aparición del análisis complejo, el nacimiento de la mecánica analítica."

Cálculo, cuyo objetivo era el estudio de estas cantidades, el Análisis era simplemente el método o herramienta que posibilitaba el estudio de dichas cantidades. Uno de los ejemplos más decantados de esta tradición es el libro del Marqués de l'Hôpital *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las curvas*.

A mediados del siglo XVIII Leonhard Euler introduce un gran cambio con respecto a este punto de vista cuando propone eliminar toda referencia hecha a la geometría en el estudio de las cantidades variables. Para lograr este objetivo fue necesaria la introducción del concepto de cantidad abstracta o universal, y es a partir de este concepto que Euler definiría su noción de función.

No obstante, en las matemáticas ya existía un concepto de función. Este concepto se encontraba fuertemente vinculado con el interés por las cantidades variables que había marcado el rompimiento entre las matemáticas medievales y las matemáticas modernas y cuyo mejor representante era el Cálculo. Fue a partir de Newton que surgió un estrecho vínculo entre los conceptos de función y los de variación y cálculo fluxional, y fue con el estudio de líneas curvas y el problema de tangentes que la idea de función surgió en Leibniz cuando trataba problemas geométricos con el lenguaje del Cálculo.

La palabra función apareció publicada por vez primera en los artículos de Leibniz *De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus formata easque omnes tangente, ac de novo in ea re analysis infinitorum usu* en 1692 y *Nova calculi differentialis applicatio et usus ad multiplicem linearum constructionem ex data tangentium conditione* en 1694.[1] Sin embargo, en la correspondencia entre Leibniz y Johann Bernoulli, en repetidas ocasiones, se discutía el concepto de función y los símbolos (o caracteres) utilizados para representarlas. En una carta fechada el 2 de septiembre de 1694 Bernoulli le escribe a Leibniz con motivo de la expansión de la integral $\int ndz$ en una serie infinita y en la cual aclara: "por n entiendo una cantidad formada de alguna manera a partir de [cantidades] indeterminadas y constantes."[2] Más tarde, en 1698, fue Bernoulli el primero en hablar de 'funciones de ordenadasén [4, T. 1 p. 424] cuando estudiaba un problema isoperimétrico planteado por su hermano Jakob; finalmente en 1718, en un artículo publicado en las Memorias de la Academia de París, Johann Bernoulli publicó la siguiente definición del término función:

[1] Cf. [17, Vol. 5 pp. 268 y 306.].

[2] Cf. *Ibid.* [Vol. 2 p. 150] "per n intelligo quantitatem quomodocunque formatam ex inderminatis et constantibus."

> Llamo función de una magnitud variable a una cantidad compuesta de cualquier manera de esta magnitud variable y de constantes.[3]

Es también en este artículo que Bernoulli propuso la letra φ para denotar a una función como φx. La introducción de paréntesis y de la letra f se debe a Euler quien las utilizó por primera vez en su artículo *Additamentum ad dissertationem de infinitis curvis eiusdem generis*[4] presentado en 1734 y publicado en 1740.

La definición que Euler daría del término función, publicada en 1748 en su gran tratado de Análisis intitulado *Introductio in analysin infinitorum*, es completamente congruente con la visión de Bernoulli como veremos más adelante. Nuestro objetivo en este artículo es el de analizar el papel que esta definición de función jugó en la constitución del Análisis Matemático en tanto que tal, y a su vez la influencia que la constitución de esta rama de las matemáticas tuvo sobre el concepto de función. Para lograr esto, nuestro primer punto de referencia será este gran tratado de Euler. Posteriormemte analizaremos esta cuestión en el marco de un problema fundamental de la mecánica analítica y en los fundamentos del cálculo diferencial, y finalmente estudiaremos un texto de Euler publicado en 1767 en el cual presenta un programa de organización para el Análisis con lo que culmina la constitución de lo que podemos llamar el Análisis Matemático Moderno.

2. 1748 y la aparición de la *Introductio in analysin infinitorum*

En 1748 apareció publicada la *Introductio in analysin infinitorum*[5] de Euler que consta de dos volúmenes, y que puede ser considerada como la primera entrega de una trilogía, cuyas otras dos partes están formadas por *Institutiones calculi differentialis*[6] e *Institutionum calculi integralis*.[7] La *Introductio* −como usualmente se conoce a [10]− fue

[3]Cf. [5]. “On appelle fonction d’ une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes.”

Hacemos notar al lector que en ésta y en todas las citas hemos conservado la ortografía original como aparece en las publicaciones y que en ocasiones es distinta a la ortografía moderna.

[4]Cf. [9].

[5]Cf. [10]

[6]Cf. [12]

[7]Cf. [14]

publicada en Lausana después de una larga espera por parte de Euler, pues como él mismo dice en una carta a d' Alembert,[8] el libro estuvo tres años en manos de los editores antes de ser publicado finalmente. De hecho esta obra también es mencionada en una carta de Euler a Golbach[9] del 4 de julio de 1744, y ésta nos permite ver que la espera de la publicación fue incluso más larga de lo que Euler le dice a d' Alembert:

> Entretanto mandé ahí [a Lausana] un nuevo trabajo intitulado *Introductio in analysin infinitorum* en donde he tratado las partes más sublimes del álgebra y de la geometría y he resuelto un gran número de problemas difíciles sin recurrir al cálculo infinitesimal, de los cuales casi nada puede ser encontrado en otras fuentes. Después de haber desarrollado un proyecto para un tratado completo sobre análisis infinitesimal, noté que muchas cosas, que en realidad están mal colocadas aquí, y que no son mencionadas en ninguna otra parte, deben ser presentadas de antemano, y el presente trabajo siguió de éstas como precursor al análisis infinitesimal.[10]

Esta carta es interesante no sólo porque nos permite darnos una idea de cuándo fue escrita la *Introductio* sino porque en ella Euler nos presenta una opinión sobre su propio texto.

En el prefacio de [10] Euler describe con claridad cuál ha sido su objetivo en el primer volumen de la *Introductio* y esto, aunado a la opinión expresada a Goldbach, nos permite tener una visión global no sólo de lo logrado en esta obra, sino del lugar que debería tener dentro del Análisis Matemático.

> Por lo tanto en el primer libro, como todo el análisis de los infinitos trata con cantidades variables y funciones de tales

[8]Cf. [7, Vol 5, Ser IV A, p. 294] Yo le diría que esta obra estuvo casi tres años en Lausana. ["Je vous dirai que cet ouvrage a été presque trois ans à Lausanne."]

[9]Cf. [15]

[10]Cf. *Ibid*. "Ich habe inzwischen ein neues Werk dahin [nach Lausanne] geschickt unter dem Titul *Introductio in analysin infinitorum*, worin ich sowohl den partem sublimiorem der Algeber als der Geometrie abgehandelt und eine grosse Menge scwerer problematum ohne den calculum infinitesimalem resolvirt, wovon fast nichts anderswo anzutreffen. Nachdem ich mir einen Plan von einem vellständigen Tractat über die analysis infinitorum formirt hatte, so habe ich bemerkt, dass sehr viele Sachen, welche dazu eigentlich nicht gehören, und nirgend abgehandelt gefunden werden, vorhergehen müssten, und aus denselben ist dieses Werk als prodromus ad analysis infinitorum entstanden."

> variables, he dado una exposición completa de las funciones.[11]

Es decir, es a partir del primer volumen que Euler coloca al concepto de función en el centro del Análisis Matemático y es así como esta disciplina deviene la ciencia general de las funciones. Aunque esta visión del Análisis es nueva, la noción de función que Euler da en este tratado había sido anticipada por la definición de 'término general'que aparece en 1730-31 cuando Euler escribe *De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt* que es un texto dedicado al estudio de progresiones cuyos términos generales no pueden ser dados en forma algebraica.

> Un término general es una fórmula que no sólo involucra cantidades constantes sino también otra cantidad no constante, digamos n, que da el orden o índice de los términos.[12]

En el primer capítulo del primer tomo de [10], dedicado a las funciones en general, Euler presenta las siguientes definiciones que conllevan un desarrollo importante para el concepto que estudiamos.

> Una cantidad constante es una cantidad determinada que conserva siempre el mismo valor.[13]
>
> Una cantidad variable es una cantidad indeterminada o universal que contiene todos los valores determinados [...] Una cantidad variable comprende en ella misma a absolutamente todos los números, tanto positivos como negativos, tanto enteros como fraccionarios, tanto racionales como irracionales y trascendentes. Incluso el cero y los números imaginarios no están excluidos del significado de cantidad variable.[14]

[11]Cf. [10, Vol. 1 p. viii] "In primo igitur Libro, cum universa Analysis infinitorum circa quantitates variabiles earumque Functiones versetur, hoc argumentum de Functionibus inprimis fusius exposui."

[12]Cf. [8, p. 38]. "Terminus [...] generalis est formula, quam ingrediuntur tum quantitates constantes tum alia quaepiam non constans ut n, quae ordinem terminorum exponit."

[13]Cf. [10, Vol. 1 p. 3] "Quantitas constans est quantitas determinata, perpetuo eumdem valorem servans."

[14]Cf. *Ibid*. [p. 4] "Quantitas variabilis est quantitas indeterminata seu universalis, quæomnes omnino valores determinatos in se complectitur [...] Quantitas variabilis in se complectitur omnes prorsus numeros, tam affirmativos quam negativos, tam integros quam fractos, tam racionales quam irrationales & trascendentes. Quinetiam cyphra & numeri imaginarii a significatu quantitatis variabilis non excluduntur."

> Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta, de cualquier manera que sea, de esta misma cantidad y de números o de cantidades constantes.[15]

Un primer punto que llama nuestra atención es que la definición de cantidad variable antecede a la noción de función puesto que en el análisis moderno esta relación es la inversa. Para Euler, sin embargo, primero se consideraban las variables, digamos $x, y, \ldots$, y luego la expresión analítica que las relaciona; en este sentido parecería que las variables son el objeto primario del análisis.

Ahora bien, si analizamos la definición de función que Euler presenta es evidente la influencia que la definición de Johann Bernoulli −quien había sido su maestro− tuvo sobre él. Sin embargo, en la definición euleriana nos enfrentamos a la frase 'expresión analítica'que Euler ha utilizado para definir a una función en lugar de 'cantidad'y que supone evidente y por tanto no define. La lectura de la obra permite mostrar que lo que Euler tenía en mente es que una expresión analítica es una expresión compuesta de magnitudes representadas por símbolos y números mediante las operaciones algebraicas (es decir, la adición, la resta, la multiplicación, la división, la exponenciación y la extracción de raíces) o trascendentes (como la exponencial, el logaritmo y "otras que aporta el cálculo integral en abundancia"[16]).

Esta distinción se relaciona a su vez con la distinción que hace Euler entre las funciones algebraicas y las funciones trascendentes que es la división clave en la *Introductio*, es la división −o clasificación− que guía la presentación de la obra, y por tanto la que marca el camino del Análisis Matemático. La definición que Euler presenta de esta distinción es la siguiente:

> Las funciones se dividen en algebraicas y trascendentes; las primeras están formadas únicamente a través de operaciones algebraicas y las segundas suponen en su formación operaciones trascendentes.[17]

Sin embargo lo que está en el fondo de esta definición es el hecho de que las funciones algebraicas son aquéllas que se obtienen a través de

[15] Cf. *Ibid.* "Functio quantitas variabilis, est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili, & numeris seu quantitatibus constantibus."

[16] Cf. *Ibid.* [p. 5]

[17] Cf. *Ibid.* "Functiones dividuntur in Algebraicas & Trascendentes; illæ"sunt, quæcomponuntur per operationes algebraicas solas, hævero in quibus operationes trascendentes insunt."

un número finito de operaciones elementales y las segundas mediante un número infinito de operaciones elementales.[18] Es decir, toda función es expresable en una suma finita o infinita. Éste es un resultado al cual Euler hace alusión en el Capítulo IV del primer volumen de [10]:

> No hay duda de que a cualquier función de z le puede ser dada la forma $Az^\alpha + Bz^\beta + Cz^\gamma + Dz^\delta + \ldots$, en donde los exponentes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. son números cualesquiera.[19]

Sin embargo, no se cuenta con un método general para demostrar que esta propiedad es una que guardan todas las funciones sino que su demostración se llevará a cabo caso por caso para así borrar cualquier duda de que sea posible. No obstante, este resultado es quizás uno de los resultados más importantes del texto euleriano ya que en él reside la propiedad fundamental de lo que es una función. De este modo el concepto de función, en su esencia, deviene independiente de la relación geométrica que le dio origen, la cual no es sino una aplicación que Euler desarrolla en el segundo volumen de la *Introductio*, en donde define la relación que existe entre las funciones y las curvas de la siguiente manera:

> Una función cualquiera de una variable x producirá una línea recta o curva.[20]

Euler también afirma que de manera recíproca se puede relacionar a las curvas con funciones. De esta manera la naturaleza de una línea curva estará determinada por una función de x. A partir de esto Euler presenta la siguiente clasificación de las líneas curvas:

> De esta idea de líneas curvas se deriva de manera natural su división en continuas, discontinuas o mixtas. La línea curva continua es aquélla cuya naturaleza es expresada por

[18]Esta clasificación de funciones presentada por Euler tiene a su vez varias divisiones en el caso de las funciones algebraicas; éstas pueden ser racionales o irracionales, explícitas o implícitas, enteras o fraccionarias. Otra distinción importante que hace Euler entre las funciones es entre funciones multivaluadas y funciones univaluadas. Éste es un tema de gran interés y requeriría de un artículo propio para ser analizado a profundidad, por tanto no lo abordaremos en el presente artículo.

[19]Cf. *Ibid.* [p. 47] " Sic subium erit nullum quin omnis Functio ipsius z in hujusmodi expressionem insinitam transmutari possit: $Az^\alpha + Bz^\beta + Cz^\gamma + Dz^\delta$+&c. denotantibus exponentibus $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. numeros quoscunque."

[20]Cf. *Ibid.* [Vol. 2 p. 6] "Quælibet Functio ipsius x suppeditabit lineam quandam, sive rectam sive curvam."

> una única función determinada de x. Pero si la línea curva está compuesta de diferentes porciones BM, MD, DM, etc. determinadas por varias funciones de x, de manera que BM es definida por una función, MD por una segunda función; llamaremos a este tipo de líneas curvas discontinuas o mixtas e irregulares porque ellas no están formadas de acuerdo con una única ley constante y están compuestas de porciones de diferentes curvas continuas.[21]

Es importante notar que esta definición implica que la continuidad de una curva depende de que esté definida a partir de una única ley y que de ser éste el caso entonces la curva es inmediatamente continua sin que la conexidad de la curva en el plano juegue papel alguno.[22] Es decir, la continuidad es una propiedad intrínseca de cada función siempre y cuando ésta se encuentre expresada a partir de una única expresión analítica. A su vez esto implica que esta propiedad es una propiedad global y no local como lo es hoy (o lo sería a partir de Cauchy). También es importante notar que Euler no introduce este concepto de continuidad sino hasta el segundo volumen de su obra, de donde es posible ver que la clasificación que permite el concepto de continuidad es una que recae sobre las curvas mismas y no sobre la función.

El siguiente paso importante para el concepto euleriano de función vendría a partir del trabajo hecho por Euler en el ámbito de la física matemática, y en particular referente al problema de la cuerda vibrante como veremos en la sección siguiente.

3. El Problema de la Cuerda Vibrante

Hacia mediados del siglo XVIII el debate sobre el concepto de función se convirtió también en un tema central en el marco del problema

[21] Cf. *Ibid.* "Ex hac linearum curvarum idea statim sequitur earum divisio in continuas, & discontinuas seu mixtas. Linea scilicet curva continua ita est comparata, ut ejus natura per unam ipsius x Functionem definitam exprimatur. Quod si autem linea curva ita sit comparata, ut variæejus portiones BM, MD, DM &c., per varias ipsius x Functiones exprimantur, ita ut, postquam ex una Functione portio BM fuerit definita, tum ex alia Functione portio MD describatur; hujusmodi lineas curvas discontinuas seu mixtas & irregulares appellamus; propterea quod non secundum unam legem constantem formantur, atque ex portionibus variarum curvarum continuarum componuntur."

[22] Por ejemplo, la curva trazada a partir de la función $y = \frac{1}{x}$ es continua en el sentido de Euler pero la curva que aparece en la Figura 1 más adelante es discontinua.

de la cuerda vibrante. La solución de este problema trajo consigo una discusión entre los matemáticos más notables de la época entre quienes se encontraban d' Alembert y Euler en un primer momento, y posteriormente Daniel Bernoulli y Lagrange.

La discusión comenzó en 1747 con la publicación de la solución de d' Alembert al problema de la cuerda vibrante homogénea en su memoria intitulada *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*.[23] Este artículo de d' Alembert es el primero en llevar a cabo exitosamente la integración de la ecuación diferencial que describe la infinidad de formas que puede tomar una cuerda homogénea en el plano al ser puesta a vibrar. El interés de d' Alembert en este problema surgió al tratar de demostrar que la cuerda podía tomar una infinidad de formas no senoidales.

Para resolver el problema d' Alembert considera una función $y = y(t, x)$ que varía continuamente con x de 0 a l, donde l es la longitud de la cuerda y obtiene así la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Para resolver esta ecuación observa que

$$d\left(\frac{\partial y}{\partial x} \pm \frac{\partial y}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \pm \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}\right)(dt \pm dx)$$

y que por tanto $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}$ es una función de $t + x$ y $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}$ es una función de $t - x$. A partir de esto se sigue que la solución y buscada es de la forma $y = \Psi(t + x) + \Gamma(t - x)$. Pero es fácil ver que esta solución puede ser simplificada si se supone que $y(t, 0) = y(t, l) = 0$, y llevada a la forma

$$y = \Psi(t + x) - \Psi(t - x).$$

En un artículo publicado inmediatamente después por el propio d' Alembert,[24] se supone que el problema tiene como condición inicial las condiciones $y(0, x) = f(x)$ y $\nu(0, x) = g(x)$ en donde $\nu(t, x)$ representa la velocidad de los puntos x de la cuerda en el tiempo t. A partir de estas condiciones se sigue que

$$\Psi(x) + \Psi(-x) = \int g(x)dx$$

[23] Cf. [1] y para una discusión sobre este texto y las aportaciones de d' Alembert al problema general de la cuerda vibrante remitimos al lector a [18].

[24] Cf. [2].

y "por tanto el problema es imposible a menos de que $f(x)$ y $g(x)$ sean funciones impares de x, es decir, funciones en donde sólo aparecen potencias impares de x."[25] Si esta condición se cumple entonces obtenemos a partir de la ecuación anterior que

$$\Psi(x) = \frac{1}{2}\int g(x)dx + \frac{1}{2}f(x)$$

y

$$\Psi(-x) = \frac{1}{2}\int g(x)dx - \frac{1}{2}f(x)$$

lo cual resuelve por completo el problema.

Finalmente, d'Alembert concluye que "la solución general del problema de la cuerda vibrante se reduce a dos cosas: determinar de la manera más general la curva generatriz y encontrar en cada caso particular cuál debe ser esta curva a partir de los valores de $f(x)$ y $g(x)$[26], además de que "f y g no pueden ser tomadas a voluntad, deben tener ciertas condiciones."[27]

D'Alembert hace una lista de estas condiciones cuya característica principal es que restringen la forma y velocidad inicial de la cuerda a curvas cuyas ecuaciones son funciones impares con periodo $2l$. Agrega también que la función $f(x)$ debe estar sujeta a la ley de continuidad, refiriéndose así a la propiedad que Euler había definido en [10], es decir, que $f(x)$ debe estar dada a través de una única expresión analítica.

Una vez planteada esta visión de d'Alembert sobre el tipo de funciones que deberían ser admitidas como soluciones al problema de la cuerda vibrante, Euler publicó un artículo en 1750, *Sur la vibrations des cordes*,[28] en el cual se presenta una solución al problema de la cuerda vibrante. Desde un punto de vista técnico esta solución no difiere mucho de la solución de d'Alembert. Euler estudia la misma ecuación que d'Alembert y simplemente comenta que su interés es el de buscar "la máxima generalidad posible en la solución del problema de manera

[25]Cf. *Ibid.* [p. 231] "Donc le probleme est imposible si les fonctions [f] & [g] ne sont pas l'une & l'autre des fonctions impaires de [x], c.à.d. des fonctions où il n'entre que des puissances impaires de [x]".

[26]Cf. *Ibid.* [p. 235] "La solution générale du Probleme des cordes vibrantes se reduit à deux choses: 1. à déterminer de la maniere la plus générale la courbe generatrice, 2. à trouver ensuite dans chaque cas particulier, quelle doit être cette courbe, par les valeurs de [$f(x)$] & de [$g(x)$]."

[27]Cf. *Ibid.* [p. 239] "[f] & [g] ne peuvent pas être données à volonté, ces quantités doivent avoir des certaines conditions."

[28]Cf. [11].